

0-798136

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шайдулин

Шайдулин Вахит Шамильевич

**Исследование свойств ряда Лапласа для гравитационного  
потенциала тел нерегулярной структуры**

01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург — 2012

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Холшевников Константин Владиславович

Официальные оппоненты: Гаязов Искандар Сафаевич,  
доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник,  
Институт прикладной астрономии РАН,  
заведующий лабораторией

Тимошкова Елена Ивановна,  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник,  
Главная (Пулковская) астрономическая обсер-  
ватория РАН  
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Уральский федеральный университет

Защита состоится "4" декабря 2012 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссер-  
тационного совета Д 212.232.15 при Санкт-Петербургском государственном  
университете по адресу: 198504, г. Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Уни-  
верситетский пр. 28., ауд. 2143 (Математико-механический факультет).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ



0000785584

Автореферат разослан "29" "10" 2012 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

Орлов Виктор Владимирович

Диссертация посвящена исследованию некоторых свойств ряда Лапласа, представляющего гравитационный потенциал тел нерегулярной структуры. Под телами нерегулярной структуры понимаются тела ограниченного размера с кусочно-гладкой поверхностью и с плотностью, имеющей разрывы на конечном множестве кусочно-гладких поверхностей. Примерами таких тел являются планеты земной группы, карликовые планеты, спутники, астероиды. Многие современные задачи в небесной механике, геодезии, геофизике требуют подробной модели гравитационного потенциала небесных тел, и в особенности Земли. Практически единственный, на сегодняшний момент, инструмент, позволяющий создать такую модель, — это разложение гравитационного потенциала в ряд Лапласа. Значение коэффициентов ряда (гармонических коэффициентов, параметров Стокса) для Земли оценивается по результатам различного рода измерений. До космической эры использовались измерения модуля силы тяжести маятниковыми приборами, отклонений отвеса, вызванных несферичностью Земли, возмущений орбиты Луны. В 60-е годы прошлого века на первое место вышли наблюдения ИСЗ, возмущения в движении которых зависят от параметров Стокса, особенно низких порядков. В настоящее время используются все указанные методы и, кроме того, альтиметрические измерения со специальных спутников, измерения класса спутник — спутник и другие. Что касается других небесных тел, то тут пока используется лишь метод оценивания параметров их гравитационного поля по возмущениям их естественных спутников, искусственных спутников и пролетных космических аппаратов. Во всех случаях мы получаем отрезок ряда Лапласа конечной длины — тем большей, чем богаче совокупность наблюдательных данных. Набор гармонических коэффициентов в совокупности с гравитационным параметром и характерным размером тела являет собой численную модель гравитационного потенциала. Для многих тел Солнечной системы были построены такие модели. Среди них Земля, Луна, Марс, Венера, Фобос, Ио, Эрос. Если исключить Землю, то можно заметить, что разработанные численные модели гравитационного потенциала небесных тел Солнечной системы опираются на короткий отрезок ряда Лапласа. К сожалению, этого недостаточно для выделения общих свойств, таких как скорость убывания

общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала интересующих нас тел нерегулярной структуры (этот факт вытекает из результатов третьей главы).

Единственным, на сегодняшний момент, хорошо исследованным объектом является Земля, и для нее построено множество подробных моделей. Как указано в [3], знания о гравитационном потенциале Земли и о форме Земли, которая гравитационным потенциалом преимущественно определяется, накапливались постепенно. Ньютон знал, что Земля представляет собой сжатый сфероид, то есть помимо нулевой гармоники уже была известна и вторая  $J_2$ . К концу XIX века была определена и четвертая зональная гармоника  $J_4$  и все коэффициенты сферической функции второго порядка, что позволяло аппроксимировать Землю трехосным эллипсоидом. К концу первой половины XX века от эллипсоидальной аппроксимации отказались. Все параметры Стокса (а не только зональные) были определены вплоть до четвертого порядка включительно [6].

Во второй половине XX века с началом космической эры человечества появилось множество моделей гравитационного потенциала Земли, расширяющих и уточняющих наши знания о нем. Первенство принадлежит модели Стандартной Земли 1966 года [25], предоставившей полный набор гармонических коэффициентов до 15 степени и порядка включительно. Она была разработана в Смитсоновской Астрофизической Обсерватории. Свое развитие модель Стандартной Земли получила в 1969 [16], 1973 [15], когда удалось продолжить ряд Лапласа до 22 и 24 степени включительно. Параллельно другие научные группы также создали и развили собственные модели геопотенциала. В 1968 году в университете штата Огайо появилась первая из серии модель OSU68 [27], содержащая гармоники до 14 степени включительно. В дальнейшем вышли OSU73 [28] (максимальная степень — 20), OSU81 [29] (максимальная степень — 180), OSU86 [30] (максимальная степень — 360), OSU89 [31] (максимальная степень — 360), OSU91 [32] (максимальная степень — 360). Центр космических полетов им. Годдарда разработал ряд своих моделей GEM1 и GEM2 [20] (12 и 16 — максимальные степени), GEM3 и GEM4 [21] (12 и 16 — максимальные степени), GEM5 и GEM6 [22] (12 и 16 — максимальные степени), GEM7 и GEM8 [34] (16 и

25 — максимальные степени), GEM9 и GEM10 [24] (30 и 30 — максимальные степени), GEM10A и GEM10B [23] (30 и 36 — максимальные степени).

В конце XX и начале XXI столетий было разработано множество моделей геопотенциала с использованием данных измерений специальных искусственных спутников Земли CHAMP и GRACE. Укажем наиболее популярные: EGM96 [19], GL04C [14], GGM02 [33]. Среди них выделяется модель EGM2008 [26], содержащая полный набор гармонических коэффициентов до степени и порядка 2159. Необходимость построения столь детальных численных моделей продиктована в основном задачами геодезии, гравиметрии и геофизики. В нашем же случае это позволило проверить справедливость теоретических оценок скорости убывания общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала. Первые оценки, известные еще Лапласу, гарантировали ограниченность сферических гармоник [5]. Оценки, указывающие их убывание, впервые (насколько нам известно) получены М.С.Яров-Яровым [12]. Для случая малых степеней получены оценки М.С.Петровской [8]. В определенном смысле точные оценки получены В.А.Антоновым и К.В.Холшевниковым [2]. Проведенное в настоящей диссертации исследование численной модели геопотенциала подтвердило справедливость этих оценок на примере Земли, и, даже больше, позволило выделить класс тел, для которых теоретическая оценка существенно улучшается.

Дополнительную информацию по гравитационному потенциалу, его представлению рядом Лапласа и оценкам общего члена ряда Лапласа можно найти в следующих источниках: [9, 4, 17, 18, 13, 7, 11, 1, 10].

**Актуальность темы.** Множество средств и усилий было приложено и прилагается до сих пор в попытках узнать как можно подробнее внутреннюю структуру, рельеф поверхности и гравитационный потенциал Земли. Наша планета — единственный объект, который на сегодняшний момент возможно детально исследовать, среди широкого класса небесных тел нерегулярной структуры. Пока исследователи стараются увеличить количественные показатели: выделить структурные элементы внутри и на поверхности Земли меньшего размера, выделить гармоники геопотенциала

большей степени и т.д. К сегодняшнему дню накопилось уже большое количество информации, что позволяет пытаться выделить качественно новые знания о Земле и подобных ей небесных телах. Данная диссертация представляет одну из таких попыток.

**Цель и задачи работы.** Основной целью диссертации является выявление характерных свойств ряда Лапласа гравитационного потенциала тел нерегулярной структуры в теории и проверка на реальном объекте, Земле. Необходимо решить следующие задачи:

- В теории удобно применять равномерную (чебышевскую) норму, и оценка скорости убывания общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала в нашем случае [2] выражена с использованием равномерной нормы. Однако численные расчеты с моделями гравитационного потенциала ярко продемонстрировали неудобство равномерной нормы в практическом применении. Наиболее подходящим при численных расчетах со сферическими функциями оказалось использование среднеквадратической (евклидовой) нормы. Потребовалось установить связь среднеквадратической и равномерной норм в случае сферических функций, чтобы осуществить перенос теоретических оценок на среднеквадратические нормы сферических функций. Это позволяет установить связь между теорией и практикой. Частично данная задача решена в первой главе.
- В процессе исследований оказалось, что первоначальная оценка, приведенная в [2], для геопотенциала не достигается, то есть нормы сферических функций убывают быстрее, чем ожидалось. Необходимо было объяснить природу этого явления. В ходе теоретических изысканий установлено, что существует широкий класс тел, для которых оценку возможно улучшить. Такие тела описываются во второй главе.
- Используя совокупность гармонических коэффициентов в модели, возможно получить набор среднеквадратических норм сферических

функций. Для сравнения с теорией требуется по имеющемуся набору норм определить оценку для скорости убывания этих норм. Для решения данной задачи используется модифицированный метод наименьших квадратов, который подробно описан в третьей главе.

Таким образом, решив поставленные задачи, мы достигнем основной цели диссертации: установления скорости убывания общего члена ряда Лапласа для важного класса тел нерегулярной структуры и возможности приращения этого результата к Земле.

### **Научная новизна работы.**

- Представлены асимптотики отношения равномерной и среднеквадратической норм присоединенных функций Лежандра в двух крайних частных случаях.
- Обнаружен класс тел нерегулярной структуры с ускоренным убыванием общего члена ряда Лапласа для гравитационного потенциала.
- Разработан алгоритм определения параметров оценки общего члена ряда Лапласа по конечному набору гармонических коэффициентов.

**Научная и практическая ценность.** Множество промежуточных результатов диссертации обладает собственной научной и практической ценностью. В первой главе приведены неравенства, связывающие среднеквадратическую и равномерную нормы элементарных сферических функций. А в двух частных предельных случаях обнаружены асимптотики их отношения, значительно уточняющие связь норм. Во второй главе введен и исследован класс тел нерегулярной структуры, для которого обнаружено, что скорость убывания общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала выше ожидаемой. В третьей главе сформирована методика, которая позволяет исследовать модели гравитационного потенциала реальных тел. В диссертации она применяется к Земле, однако в дальнейшем вполне возможно провести исследования и других объектов, когда будут построены подробные модели их гравитационного потенциала.

**Апробация работы.** Результаты, полученные в ходе данного исследования, докладывались на семинарах Кафедры небесной механики СПбГУ, Института прикладной астрономии РАН, Главной (Пулковской) астрономической обсерватории РАН, а также на научных конференциях: с 36-й по 41-ю международных студенческих научных конференциях «Физика космоса» (г. Екатеринбург, 2007–2012 гг.); на международной научной конференции «JENAM-2011» (г. Санкт-Петербург, 4–8 июля 2011 г.); на международной научной конференции «Планетарная геодезия и эфемериды» (г. Москва, 14–16 ноября 2011 г.).

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации — 149 с., включая 24 рисунка и 3 таблицы.

*Первая глава* «Ряд Лапласа и сферические функции» содержит в себе определение гравитационного потенциала тела и его разложения в ряд Лапласа. Обсуждается вопрос связи среднеквадратической и равномерной норм сферических функций. Для элементарных сферических функций  $Y_{nk}(\theta, \lambda) = P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda$  среднеквадратическая норма известна:

$$\|Y_{nk}\| = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}} \|\cos k\lambda\|.$$

В случае множителя  $\sin k\lambda$  в элементарной сферической гармонике все выкладки аналогичны. Сравнимого по простоте выражения для равномерной нормы  $\langle Y_n^k \rangle$  не существует. Ограничимся поиском асимптотического представления  $\langle Y_n^k \rangle$  при  $n \rightarrow \infty$ . Удалось разобрать два частных случая.

В первом предполагается  $k \ll n$ . Тогда

$$\langle Y_n^k \rangle \sim \bar{J}_k n^k,$$

а для отношения, связывающего среднеквадратическую и равномерную норму, справедливо

$$\frac{\langle Y_n^k \rangle}{\|Y_n^k\|} \sim \bar{J}_k \frac{\sqrt{2n+1}}{\|\cos k\lambda\|}.$$

Здесь  $\bar{J}_k = \max |J_k(x)|$ , где  $J_k$  — функция Бесселя  $k$ -ого порядка.



Во втором случае предполагается  $n - k \ll n$ . Тогда

$$\langle Y_n^k \rangle \sim \gamma_k \left( \frac{2n}{e} \right)^{(n+k)/2},$$

$$\frac{\langle Y_n^k \rangle}{\|Y_n^k\|} \sim \frac{\delta_k \sqrt[4]{n}}{\|\cos k\lambda\|}.$$

Значения  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$  зависят только от порядка  $k$ , но не от степени  $n$ .

Установлено асимптотическое поведение  $\bar{J}_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$ .

Приведены различные асимптотики и оценки многочленов Лежандра, их производных и интегралов в некоторых частных случаях, которые используются во второй главе.

Во второй главе «Ряд Лапласа модельных тел» ищется показатель  $\sigma$  в оценке общего члена ряда Лапласа [2]

$$\langle Y_n^k \rangle \leq \frac{C}{n^\sigma}$$

на примере модельных тел.

Для однородного цилиндра, как и в примере с полушаром из [2], оказалось  $\sigma = 5/2$ . Важно отметить, что множество общих точек цилиндра с объемлющей сферой одномерно, в отличие от полушара, где это множество двумерно. Рассмотрение составного тела, представляющего собой шар с одним или несколькими цилиндрами на его поверхности и моделирующего планету с одной или несколькими столовыми горами, показало, что  $\sigma = 5/2$ . Таким образом, скорость убывания общего члена ряда Лапласа определяется цилиндрической неоднородностью формы тела. Аналогичный результат был достигнут для шара с утопленным цилиндром. В этом случае значение  $\sigma$  определялось неоднородностью массы тела.

Для однородного шарового сектора, моделирующего конические горы, исследования показали, что  $\sigma = 3$ . Аналогично цилиндру для составных тел  $\sigma$  определялось шаровым сектором и равнялось 3. Таким образом, нам удалось построить несколько примеров тел, скорость убывания которых выше ожидаемой.

Развивая результаты, полученные для шарового сектора, мы ввели класс тел, представляющих собой шар с коническими горами, распределение массы внутри которых произвольно. Исследования показали, что и в таком весьма общем случае  $\sigma = 3$ .

*Третья глава* «Ряд Лапласа для геопотенциала» посвящена исследованию ряда Лапласа гравитационного потенциала Земли. Численные данные взяты из модели геопотенциала EGM2008. С помощью модифицированного метода МНК определена скорость убывания общего члена ряда Лапласа. Результаты расчетов показывают, что Землю можно отнести к классу тел нерегулярной структуры с ускоренной сходимостью ряда Лапласа гравитационного потенциала.

В *приложение* вынесены вспомогательные математические предположения и методы, используемые в данной работе, но напрямую не относящиеся к теме диссертации.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

- Обнаружен широкий класс тел нерегулярной структуры, для которых скорость убывания общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала выше, чем для всей совокупности рассматриваемых тел нерегулярной структуры.
- Разработан метод определения параметров оценки общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала по данным численных моделей.
- На основании расчетов по данным модели EGM2008 установлено, что Земля скорее всего принадлежит к классу тел с ускоренным убыванием общего члена ряда Лапласа гравитационного потенциала.

**Публикации по результатам работы.** Основные результаты работы опубликованы в следующих статьях в рецензируемых журналах.

- *Холшевников К.В., Шайдуллин В.Ш.* Соотношение между нормами функции и ее градиента в классах сферических и шаровых функций в конечномерном пространстве // Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 2, 2008, с. 93–96.
- *Холшевников К.В., Шайдуллин В.Ш.* Асимптотика равномерной нормы присоединенных функций Лежандра  $P_n^k$  (случай  $k \ll n$ ) // Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 2, 2009, с. 86–93.

- *Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* Асимптотика равномерной нормы присоединенных функций Лежандра  $P_n^k$  (случай  $n - k \ll n$ )// Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 3, 2009, с. 97–109.
- *Шайдулин В.Ш.* Ряд Лапласа для потенциала шарового сектора// Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 2, 2010, с. 156–163.
- *Антонов В.А., Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* Об оценке производной многочлена Лежандра// Вестник СПбГУ, сер. 1, вып. 4, 2010, с. 3–9.
- *Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* Оценка скорости убывания общего члена ряда Лапласа для геопотенциала// *Астрономический Вестник*, том 45, № 1, 2011, с. 55–61.

В совместных статьях вклад соавторов равнозначен. Во всех указанных работах автор участвовал в постановке задачи.

Тезисы докладов по результатам работы опубликованы в трудах конференций:

- *Шайдулин В.Ш.* Сравнение гармонических коэффициентов некоторых современных моделей гравитационного потенциала Земли// Труды 36-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 29 января — 2 февраля 2007 г, с.243.
- *Шайдулин В.Ш.* Исследование некоторых свойств ряда Лапласа для гравитационного потенциала Земли// Труды 37-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 28 января — 1 февраля 2008 г, с.271.
- *Шайдулин В.Ш., Холшевников К.В.* Соотношения между нормами сферических функций в представлении геопотенциала// Труды 38-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 2 — 6 февраля 2009 г, с.335.
- *Шайдулин В.Ш.* Оценка скорости убывания общего члена ряда Лапласа для геопотенциала// Труды 39-й Международной студенческой

научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 1 — 5 февраля 2010 г, с.231.

- *Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* О точности оценок Холшевникова–Антонова общего члена ряда Лапласа// Труды 40-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 31 января — 4 февраля 2011 г, с.229–240.
- *Шайдулин В.Ш.* Оценка некоторых характеристик модели геопотенциала EGM2008// Труды 41-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 30 января — 3 февраля 2012 г, с.257.
- *Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* Точные оценки общего члена ряда Лапласа для гравитационного потенциала// Труды 41-й Международной студенческой научной конференции «Физика космоса», Екатеринбург, 30 января — 3 февраля 2012 г, с.186–199.
- *Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh.* On the exactness of Kholshevnikov – Antonov estimates of the general term of the Laplace series for celestial bodies// European Week of Astronomy and Space Science «JENAM-2011», Saint-Petersburg, Russia, 4 — 8 July 2011, p.22.

## Литература

- [1] Антонов В. А., Никифоров И. И., Холшевников К. В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. — СПб.: Изд. СПбГУ, 2008. — С. 208.
- [2] Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М.: Наука, 1988. — С. 270.
- [3] Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. — М.: Наука, 1976. — С. 512.
- [4] Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. — М.: ИЛ, 1960. — С. 486.
- [5] Дубошин Г. Н. Теория притяжения. — М.: ФМ, 1961. — С. 288.
- [6] Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения // *Бюлл. ИТА*. — 1957. — Т. 6, № 8.
- [7] Жонголович И. Д. Обзор результатов определения параметров гравитационного поля Земли из наблюдений ИС // *Наблюдения ИСЗ*. — 1962. — № 1.
- [8] Петровская М. С. Оценки коэффициентов разложения геопотенциала по сферическим функциям // *Бюлл. ИТА*. — 1971. — Т. 12, № 8.
- [9] Пицетти П. Основы механической теории фигур планет. — М.: ГТТИ, 1933. — С. 171.
- [10] Холшевников К. В., Никифоров И. И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах. — СПб.: Изд. СПбГУ, 2008. — С. 72.
- [11] Холшевников К. В., Питъев Н. П., Титов В. Б. Притяжение небесных тел. — СПб.: Изд. СПбГУ, 2005. — С. 108.

- [12] Яров-Яровой М. С. О силовой функции притяжения планеты и ее спутника. — Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». М.: АН. — 1963.
- [13] Cook A. H. The contribution of observations of satellites to the determination of the earth's gravitational potential // *Space Sci. Revs.* — 1963. — Vol. 2, no. 3.
- [14] Forste C. et al. The geoforschungszentrum potsdam/groupe de recherche de géodesie spatiale. satellite-only and combined gravity field models: Eigen-gl04s1 and eigen-gl04c // *Journal of Geodesy.* — 2008. — Vol. 82, no. 6.
- [15] Gaposchkin E. M. Smithsonian standard earth (iii). — Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge/Mass., Special Report No. 353. — 1973.
- [16] Gaposchkin E. M., Lambeck K. 1969 smithonian standard earth (ii). — Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge/Mass., Special Report No. 315. — 1970.
- [17] Kaula W. M. Statistical and harmonic analysis of gravity // *Journ. Geoph. Res.* — 1959. — Vol. 64, no. 12.
- [18] Kaula W. M. A geoid and world geodetic system based on a combination of gravimetric, astrogeodetic, and satellite data // *Journ. Geoph. Res.* — 1961. — Vol. 66, no. 6.
- [19] Lemoine F. G. et al. The development of the joint nasa gsfc and nima geopotential model egn96 // *NASA Goddard Space Flight Center.* — 1998.
- [20] Lerch F. J. et al. Gravitational field models for the earth (gem 1 and 2). — Goddard Space Flight Center, Greenbelt/Maryland, Report X55372146. — 1972.
- [21] Lerch F. J. et al. Gravitational field models gem3 and 4. — Goddard Space Flight Center, Greenbelt/Maryland, Report X59272476. — 1972.
- [22] Lerch F. J. et al. Goddard earth models (5 and 6). — Goddard Space Flight Center, Greenbelt/Maryland, Report X92174145. — 1974.

- [23] *Lerch F. J. et al.* Gravity model improvement using geos3 altimetry (gem10a and 10b). — 1978 Spring Annual Meeting of the American Geophysical Union, Miami. — 1978.
- [24] *Lerch F. J. et al.* Gravity model improvement using geos3 (gem9 and 10) // *Journal of Geophysical Research*. — 1979. — Vol. 84, no. B8. — Pp. 3897–3916.
- [25] *Lundquist C. A., Veis G.* Geodetic parameters for a 1966 smithonian institution standard earth. — Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge/Mass., Special Report No. 200. — 1966.
- [26] *Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K.* An earth gravitational model to degree 2160: Egm2008 // EGU General Assembly 2008. — Vienna, Austria: April 13–18, 2008.
- [27] *Rapp R. H.* Gravitational potential of the earth determined from a combination of satellite, observed, and model anomalies // *Journal of Geophysical Research*. — 1968. — Vol. 73, no. 20. — Pp. 6555–6562.
- [28] *Rapp R. H.* Numerical results from the combination of gravimetric and satellite data using the principles of least squares collocation. — The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 200, Columbus/Ohio. — 1973.
- [29] *Rapp R. H.* The earth's gravity field to degree and order 180 using seasat altimeter data, terrestrial gravity data, and other data. — The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 322, Columbus/Ohio. — 1981.
- [30] *Rapp R. H., Cruz J. Y.* Spherical harmonic expansion of the earth's gravitational potential to degree 360 using 30' mean anomalies. — The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 376, Columbus/Ohio. — 1986b.
- [31] *Rapp R. H., Pavlis N. K.* The development and analysis of geopotential coefficient models to spherical harmonic degree 360 // *Journal of Geophysical Research*. — 1990. — Vol. 95, no. B13. — Pp. 21885–21911.

- [32] *Rapp R. H., Wang Y. M., Pavlis N. K.* The ohio state 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models. — The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 410, Columbus/Ohio. — 1991.
- [33] *Tapley B. et al.* Ggm02 - an improved earth gravity field model from grace // *Journal of Geodesy*. — 2005. — Vol. 79, no. 8.
- [34] *Wagner C. A. et al.* Improvement in the geopotential derived from satellite and surface data. — Goddard Space Flight Center, Greenbelt/Maryland, Report X9217620. — 1976.

---

|                             |   |          |             |
|-----------------------------|---|----------|-------------|
| Подписано в печать 22.10.12 | Формат 60x84 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> | Цифровая | Печ. л. 1.0 |
| Тираж 100                   | Заказ 12/10                               | печать   |             |

---

Отпечатано в типографии «Фалкон Принт»  
(197101, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Пушкарская, д. 54, офис 2)